Wahrscheinlichkeitsrechnung

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$, Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Satz von Bayes: $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B \mid A)\,P(A) + P(B \mid \overline{A})\,P(\overline{A})} = \dfrac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B \mid A)\,P(A) + [1 - P(\overline{B} \mid \overline{A})]\,[1 - P(A)]}$

Anzahl Möglichkeiten, einer Menge von n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu entnehmen:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Variation (geordnete Stichprobe)	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (ungeordnete Stichprobe)	$\dbinom{n+k-1}{k}$	$\dbinom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Wahrscheinlichkeits(dichte)- und Verteilungsfunktion

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
Wahrscheinlichkeits(dichte)funktion	$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(x)$
Normierungsbedingung	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
Verteilungsfunktion	$F(x_i) = \sum_{k=1}^{i} f(x_k)$	$F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)\,dx$

Binomialverteilung: $f(k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$ Poisson-Verteilung: $f(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung:

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368	0,333	0,301	0,273	0,247	0,223	0,202	0,183	0,165
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736	0,699	0,663	0,627	0,592	0,558	0,525	0,493	0,463
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920	0,900	0,879	0,857	0,833	0,809	0,783	0,757	0,731
3	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981	0,974	0,966	0,957	0,946	0,934	0,921	0,907	0,891
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,992	0,989	0,986	0,981	0,976	0,970	0,964
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990

k \ λ	1,9	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0
0	0,150	0,135	0,082	0,050	0,030	0,018	0,011	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,434	0,406	0,287	0,199	0,136	0,092	0,061	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,704	0,677	0,544	0,423	0,321	0,238	0,174	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
3	0,875	0,857	0,758	0,647	0,537	0,433	0,342	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,005	0,002	0,001	0,000	0,000
4	0,956	0,947	0,891	0,815	0,725	0,629	0,532	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,015	0,008	0,004	0,002	0,001
5	0,987	0,983	0,958	0,916	0,858	0,785	0,703	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,038	0,020	0,011	0,006	0,003
6	0,997	0,995	0,986	0,966	0,935	0,889	0,831	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,079	0,046	0,026	0,014	0,008
7	0,999	0,999	0,996	0,988	0,973	0,949	0,913	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,143	0,090	0,054	0,032	0,018
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,990	0,979	0,960	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,232	0,155	0,100	0,062	0,037
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,992	0,983	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,341	0,242	0,166	0,109	0,070
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,460	0,347	0,252	0,176	0,118
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,579	0,462	0,353	0,260	0,185
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,689	0,576	0,463	0,358	0,268
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,781	0,682	0,573	0,464	0,363
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,854	0,772	0,675	0,570	0,466
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,907	0,844	0,764	0,669	0,568
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,944	0,899	0,835	0,756	0,664
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,968	0,937	0,890	0,827	0,749
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,982	0,963	0,930	0,883	0,819
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,991	0,979	0,957	0,923	0,875
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,988	0,975	0,952	0,917

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999

Z-Transformation: $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

- Exponentialverteilung: $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Weibull-Verteilung: $F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^k}$
- Gumbel-Verteilung: $F(x) = e^{-e^{-(x-a)/b}}$

Lage- und Streuungsmaße

	diskrete Zufallsvariablen	stetige Zufallsvariablen
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, x_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x\, dx$
Varianz	$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, [x_i - E(X)]^2$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, [x - E(X)]^2\, dx$

	Erwartungswert	Varianz
Binomialverteilung	$n\,p$	$n\,p\,q$
Poisson-Verteilung	λ	λ
Exponentialverteilung	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Normalverteilung	μ	σ^2

empirischer Mittelwert $\overline{X} = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$, empirische Varianz $S^2 = \dfrac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2$

$E(\overline{X}) = E(X)$, $Var(\overline{X}) = Var(X)/N$

$\mu = \overline{X} \pm t_{1-\alpha/2} \dfrac{S}{\sqrt{N}}$

Quantile t_p der t-Verteilung:

f	p					
	0,841	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	1,32	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,20	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,14	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,11	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,09	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,08	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,07	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,06	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,05	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,05	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,04	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,04	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,04	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,03	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,03	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,03	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,03	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88

f	p					
	0,841	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
19	1,03	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,03	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,02	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,02	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,02	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,02	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,02	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,02	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,02	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,02	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,02	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,02	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,01	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,01	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
70	1,01	1,29	1,67	1,99	2,38	2,65
100	1,01	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
∞	1,00	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

Quantile F_p der F-Verteilung:

f_1	p	f_2																
		3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	30	40	50	100	∞
3	0,950	9,3	6,6	5,4	4,8	4,3	4,1	3,9	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6
	0,975	15	10	7,8	6,6	5,9	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	4,1	3,9	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1
	0,990	29	17	12	9,8	8,5	7,6	7,0	6,6	6,0	5,6	5,3	4,9	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8
4	0,950	9,1	6,4	5,2	4,5	4,1	3,8	3,6	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4
	0,975	15	9,6	7,4	6,2	5,5	5,1	4,7	4,5	4,1	3,9	3,7	3,5	3,2	3,1	3,1	2,9	2,8
	0,990	29	16	11	9,1	7,8	7,0	6,4	6,0	5,4	5,0	4,8	4,4	4,0	3,8	3,7	3,5	3,3
5	0,950	9,0	6,3	5,1	4,4	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,7	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2
	0,975	15	9,4	7,1	6,0	5,3	4,8	4,5	4,2	3,9	3,7	3,5	3,3	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
	0,990	28	16	11	8,7	7,5	6,6	6,1	5,6	5,1	4,7	4,4	4,1	3,7	3,5	3,4	3,2	3,0
6	0,950	8,9	6,2	5,0	4,3	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1
	0,975	15	9,2	7,0	5,8	5,1	4,7	4,3	4,1	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,7	2,5	2,4
	0,990	28	15	11	8,5	7,2	6,4	5,8	5,4	4,8	4,5	4,2	3,9	3,5	3,3	3,2	3,0	2,8
7	0,950	8,9	6,1	4,9	4,2	3,8	3,5	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,5	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0
	0,975	15	9,1	6,9	5,7	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,7	2,6	2,6	2,4	2,3
	0,990	28	15	10	8,3	7,0	6,2	5,6	5,2	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	3,1	3,0	2,8	2,6
8	0,950	8,8	6,0	4,8	4,1	3,7	3,4	3,2	3,1	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
	0,975	15	9,0	6,8	5,6	4,9	4,4	4,1	3,9	3,5	3,3	3,1	2,9	2,7	2,5	2,5	2,3	2,2
	0,990	27	15	10	8,1	6,8	6,0	5,5	5,1	4,5	4,1	3,9	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,5
9	0,950	8,8	6,0	4,8	4,1	3,7	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9
	0,975	14	8,9	6,7	5,5	4,8	4,4	4,0	3,8	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1
	0,990	27	15	10	8,0	6,7	5,9	5,4	4,9	4,4	4,0	3,8	3,5	3,1	2,9	2,8	2,6	2,4
10	0,950	8,8	6,0	4,7	4,1	3,6	3,3	3,1	3,0	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8
	0,975	14	8,8	6,6	5,5	4,8	4,3	4,0	3,7	3,4	3,1	3,0	2,8	2,5	2,4	2,3	2,2	2,0
	0,990	27	15	10	7,9	6,6	5,8	5,3	4,8	4,3	3,9	3,7	3,4	3,0	2,8	2,7	2,5	2,3
12	0,950	8,7	5,9	4,7	4,0	3,6	3,3	3,1	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8
	0,975	14	8,8	6,5	5,4	4,7	4,2	3,9	3,6	3,3	3,1	2,9	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9
	0,990	27	14	9,9	7,7	6,5	5,7	5,1	4,7	4,2	3,8	3,6	3,2	2,8	2,7	2,6	2,4	2,2
14	0,950	8,7	5,9	4,6	4,0	3,5	3,2	3,0	2,9	2,6	2,5	2,4	2,2	2,0	1,9	1,9	1,8	1,7
	0,975	14	8,7	6,5	5,3	4,6	4,1	3,8	3,6	3,2	3,0	2,8	2,6	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
	0,990	27	14	9,8	7,6	6,4	5,6	5,0	4,6	4,1	3,7	3,5	3,1	2,7	2,6	2,5	2,3	2,1
16	0,950	8,7	5,8	4,6	3,9	3,5	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,9	1,7	1,6
	0,975	14	8,6	6,4	5,2	4,5	4,1	3,7	3,5	3,2	2,9	2,8	2,5	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8
	0,990	27	14	9,7	7,5	6,3	5,5	4,9	4,5	4,0	3,6	3,4	3,1	2,7	2,5	2,4	2,2	2,0
20	0,950	8,7	5,8	4,6	3,9	3,4	3,2	2,9	2,8	2,5	2,4	2,3	2,1	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6
	0,975	14	8,6	6,3	5,2	4,5	4,0	3,7	3,4	3,1	2,8	2,7	2,5	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7
	0,990	27	14	9,6	7,4	6,2	5,4	4,8	4,4	3,9	3,5	3,3	2,9	2,5	2,4	2,3	2,1	1,9
30	0,950	8,6	5,7	4,5	3,8	3,4	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5
	0,975	14	8,5	6,2	5,1	4,4	3,9	3,6	3,3	3,0	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9	1,9	1,7	1,6
	0,990	27	14	9,4	7,2	6,0	5,2	4,6	4,2	3,7	3,3	3,1	2,8	2,4	2,2	2,1	1,9	1,7
40	0,950	8,6	5,7	4,5	3,8	3,3	3,0	2,8	2,7	2,4	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
	0,975	14	8,4	6,2	5,0	4,3	3,8	3,5	3,3	2,9	2,7	2,5	2,3	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5
	0,990	26	14	9,3	7,1	5,9	5,1	4,6	4,2	3,6	3,3	3,0	2,7	2,3	2,1	2,0	1,8	1,6
50	0,950	8,6	5,7	4,4	3,8	3,3	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
	0,975	14	8,4	6,1	5,0	4,3	3,8	3,5	3,2	2,9	2,6	2,5	2,2	2,0	1,8	1,8	1,6	1,4
	0,990	26	14	9,2	7,1	5,9	5,1	4,5	4,1	3,6	3,2	3,0	2,6	2,2	2,1	1,9	1,7	1,5
100	0,950	8,6	5,7	4,4	3,7	3,3	3,0	2,8	2,6	2,3	2,2	2,1	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2
	0,975	14	8,3	6,1	4,9	4,2	3,7	3,4	3,2	2,8	2,6	2,4	2,2	1,9	1,7	1,7	1,5	1,3
	0,990	26	14	9,1	7,0	5,8	5,0	4,4	4,0	3,5	3,1	2,9	2,5	2,1	1,9	1,8	1,6	1,4
∞	0,950	8,5	5,6	4,4	3,7	3,2	2,9	2,7	2,5	2,3	2,1	2,0	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,0
	0,975	14	8,3	6,0	4,8	4,1	3,7	3,3	3,1	2,7	2,5	2,3	2,1	1,8	1,6	1,5	1,3	1,0
	0,990	26	13	9,0	6,9	5,6	4,9	4,3	3,9	3,4	3,0	2,8	2,4	2,0	1,8	1,7	1,4	1,0

Quantile χ^2_p der Chi-Quadrat-Verteilung:

f	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
1	2,7	3,8	6,6
2	4,6	6,0	9,2
3	6,3	7,8	11,3
4	7,8	9,5	13,3
5	9,2	11,1	15,1
6	10,6	12,6	16,8
7	12,0	14,1	18,5
8	13,4	15,5	20,1
9	14,7	16,9	21,7
10	16,0	18,3	23,2

f	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
11	17,3	19,7	24,7
12	18,5	21,0	26,2
13	19,8	22,4	27,7
14	21,1	23,7	29,1
15	22,3	25,0	30,6
16	23,5	26,3	32,0
17	24,8	27,6	33,4
18	26,0	28,9	34,8
19	27,2	30,1	36,2
20	28,4	31,4	37,6

f	p = 0,90	p = 0,95	p = 0,99
25	34,4	37,7	44,3
30	40,3	43,8	50,9
35	46,1	49,8	57,3
40	51,8	55,8	63,7
45	57,5	61,7	70,0
50	63,2	67,5	76,2
60	74,4	79,1	88,4
70	85,5	90,5	100
80	96,6	102	112
100	118	124	136

Quantile q_p der Verteilung der studentisierten Variationsbreite:

f	p	l = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
2	0,950	6,1	8,3	9,8	11	12	12	13	14	14	14	15	16	17
	0,990	14	19	22	25	27	28	30	31	32	33	33	35	38
3	0,950	4,5	5,9	6,8	7,5	8,0	8,5	8,9	9,2	9,5	9,7	9,9	11	11
	0,990	8,3	11	12	13	14	15	16	16	17	17	18	19	20
4	0,950	3,9	5,0	5,8	6,3	6,7	7,1	7,3	7,6	7,8	8,0	8,2	8,7	9,1
	0,990	6,5	8,1	9,2	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14
5	0,950	3,6	4,6	5,2	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8	7,0	7,2	7,3	7,7	8,2
	0,990	5,7	7,0	7,8	8,4	8,9	9,3	9,7	10	10	10	11	11	12
6	0,950	3,5	4,3	4,9	5,3	5,6	5,9	6,1	6,3	6,5	6,6	6,8	7,1	7,6
	0,990	5,2	6,3	7,0	7,6	8,0	8,3	8,6	8,9	9,0	9,3	9,5	10	11
7	0,950	3,3	4,2	4,7	5,1	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,3	6,4	6,8	7,2
	0,990	5,0	5,9	6,5	7,0	7,4	7,7	7,9	8,2	8,4	8,5	8,7	9,1	10
8	0,950	3,3	4,0	4,5	4,9	5,2	5,4	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	6,5	6,9
	0,990	4,7	5,6	6,2	6,6	7,0	7,2	7,5	7,7	7,9	8,0	8,2	8,6	9,0
9	0,950	3,2	3,9	4,4	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	6,3	6,6
	0,990	4,6	5,4	6,0	6,3	6,7	6,9	7,1	7,3	7,5	7,6	7,8	8,1	8,6
10	0,950	3,2	3,9	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,7	5,8	6,1	6,5
	0,990	4,5	5,3	5,8	6,1	6,4	6,7	6,9	7,1	7,2	7,4	7,5	7,8	8,2
11	0,950	3,1	3,8	4,3	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,5	5,6	5,7	6,0	6,3
	0,990	4,4	5,1	5,6	6,0	6,2	6,5	5,7	6,8	7,0	7,1	7,3	7,6	8,0
12	0,950	3,1	3,8	4,2	4,5	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5	5,6	5,9	6,2
	0,990	4,3	5,0	5,5	5,8	6,1	6,3	6,5	6,7	6,8	6,9	7,1	7,4	7,7
15	0,950	3,0	3,7	4,1	4,4	4,6	4,8	4,9	5,1	5,2	5,3	5,4	5,6	6,0
	0,990	4,2	4,8	5,3	5,6	5,8	6,0	6,2	6,3	6,4	6,6	6,7	6,9	7,3
20	0,950	3,0	3,6	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,4	5,7
	0,990	4,0	4,6	5,0	5,3	5,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,3	6,5	6,8
30	0,950	2,9	3,5	3,8	4,1	4,3	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,2	5,5
	0,990	3,9	4,5	4,8	5,0	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8	5,8	5,9	6,1	6,4
∞	0,950	2,8	3,3	3,6	3,9	4,0	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,6	4,8	5,0
	0,990	3,6	4,1	4,4	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,2	5,3	5,4	5,6

Statistische Tests

Test	Voraussetzungen	Prüfwert	Teststatistik bei Gültigkeit von H_0
Parametertest für den Erwartungswert	X ist normalverteilt.	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{N}}$	t-verteilt mit $f = N - 1$
Parametertest für die Varianz	X ist normalverteilt.	$\chi^2 = (N - 1)\,\frac{s^2}{\sigma_0^2}$	Chi-Quadrat-verteilt mit $f = N - 1$
F-Test	X_1 und X_2 sind normalverteilt und unabhängig voneinander.	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	F-verteilt mit $f_1 = N_1 - 1$, $f_2 = N_2 - 1$
Zweistichproben-t-Test	X_1 und X_2 sind normalverteilt, unabhängig voneinander und besitzen dieselbe Varianz.	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$	t-verteilt mit $f = N_1 + N_2 - 2$

Chi-Quadrat-Verteilungstest:

- Absolute Häufigkeit n_i der N Messwerte in I Klassen bzw. Intervallen ermitteln (i = 1, ..., I)
- Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung identifizieren, Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung abschätzen, Null- und Alternativhypothese formulieren
- Ausgehend von der Nullhypothese hypothetische absolute Häufigkeiten n_i* in den vorgegebenen I Klassen berechnen
- Klassen so zusammenfassen, dass n_i* überall mindestens 5 beträgt (reduzierte Anzahl Klassen: I*)

Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{I*} \frac{(n_i - n_i*)^2}{n_i*}$

H_0 trifft zu und Anzahl N der Messwerte genügend groß (Faustregel: N > 50)

$\Rightarrow$ χ^2 ist Chi-Quadrat-verteilt mit dem Freiheitsgrad
f = I* – 1 – Anzahl der empirisch bestimmten Parameter der hypothetischen Verteilung.

Zusammenhangsanalyse

Kontingenzanalyse

gegeben: nominal- oder ordinalskalierte Daten zu zwei Merkmalen X und Y

Kontingenztafel:

		Merkmal Y				
		y_1	y_2	…	y_J	Randsumme
Merkmal X	x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1J}	N_1
	x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2J}	N_2
	…	…	…	…	…	…
	x_I	n_{I1}	n_{I2}	…	n_{IJ}	N_I
	Randsumme	M_1	M_2	…	M_J	

- x_i: Ausprägungen des Merkmals X, i = 1, …, I
- y_j: Ausprägungen des Merkmals Y, j = 1, …, J
- N: Gesamtzahl der Beobachtungswerte
- n_{ij}: Anzahl der Beobachtungen mit der Merkmalskombination $X = x_i$ und $Y = y_j$
- Randsumme N_i: absolute Häufigkeit des Vorkommens der Merkmalsausprägung x_i
- Randsumme M_j: absolute Häufigkeit des Vorkommens der Merkmalsausprägung y_j

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest:

- Erwartete absolute Häufigkeiten $n_{ij}* = \frac{N_i\, M_j}{N}$ berechnen
- Klassen so zusammenfassen, dass $n_{ij}*$ überall mindestens 5 beträgt (reduzierte Anzahl Merkmals-ausprägungen: I*, J*)

Teststatistik: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{I*} \sum_{j=1}^{J*} \frac{(n_{ij} - n_{ij}*)^2}{n_{ij}*}$

H_0 trifft zu und Anzahl N der Messwerte genügend groß (Faustregel: N > 50)

$\Rightarrow$ χ^2 ist Chi-Quadrat-verteilt mit dem Freiheitgrad f = (I* – 1) (J* – 1).

korrigierter Kontingenzkoeffizient: $K_{korr} = \frac{K}{K_{max}}$ mit $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$ und $K_{max} = \sqrt{\frac{\min\{I;J\} - 1}{\min\{I;J\}}}$

Einfache lineare Regression

gegeben: mindestens intervallskalierte Daten zu zwei voneinander abhängigen Variablen X und Y
gesucht: Parameter der Regressionsfunktion Y = f(X) = a X + b

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} = r\,\frac{s_y}{s_x}\,,\quad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} = \bar{y} - a\,\bar{x}$$

Einfaktorielle Varianzanalyse

gegeben: nominalskalierte Daten zu einer unabhängigen Variable (einem Faktor)
mindestens intervallskalierte Daten zu einer abhängigen Variable X

Annahmen:

- Das Merkmal X wird nur durch einen Faktor A systematisch beeinflusst, der in I Stufen vorgegeben ist.
- Die Daten in den I Stichproben sind normalverteilt.
- Jede der Normalverteilungen hat dieselbe Varianz ($Var(X_i) = \sigma^2 \;\forall\; i = 1, ..., I$).
- Die I Stichproben sind unabhängig voneinander.

1. empirische Mittelwerte berechnen
   - Gesamtmittelwert bzw. arithmetisches Mittel der Merkmalswerte: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$
   - empirische Mittelwerte in den Stufen des Faktors A: $\bar{x}_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$
2. Streuungszerlegung vornehmen: $SQ = SQ_A + SQ_R$
   - $SQ = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij} - \bar{x})^2$: Gesamtstreuung
   - $SQ_A = \sum_{i=1}^{I} N_i\,(\bar{x}_i - \bar{x})^2$: durch den Faktor A verursachte Streuung
   - $SQ_R = SQ - SQ_A$: zufällige Streuung bzw. Reststreuung
3. Streuungen in empirische Varianzen umrechnen:

   $S_A^2 = \frac{SQ_A}{I-1}$, $S_R^2 = \frac{SQ_R}{N-I}$
4. einseitigen F-Test durchführen

   H_0: $\sigma_A^2 \le \sigma_R^2$
   H_1: $\sigma_A^2 > \sigma_R^2$

   Teststatistik: $F = \frac{S_A^2}{S_R^2}$

Zweifaktorielle Varianzanalyse

gegeben: nominalskalierte Daten zu zwei unabhängigen Variablen (Faktoren)
mindestens intervallskalierte Daten zu einer abhängigen Variable X

Annahmen:

- Das Merkmal X wird nur durch zwei Faktoren A und B systematisch beeinflusst, die in I und J Stufen ($I \cdot J$ Faktorstufenkombinationen) vorgegeben sind.
- In jeder Faktorstufenkombination liegt die gleiche Anzahl K > 1 von Messwerten vor.
  $\Rightarrow$ Gesamtzahl der Messwerte: $N = I \cdot J \cdot K$
- Die Daten in den $I \cdot J$ Stichproben des Umfangs K sind normalverteilt.
- Jede der Normalverteilungen hat dieselbe Varianz ($Var(X_{ij}) = \sigma^2 \;\forall\; i = 1, ..., I$ und $j = 1, ..., J$).
- Die $I \cdot J$ Stichproben sind unabhängig voneinander.

1. empirische Mittelwerte berechnen

- Gesamtmittelwert bzw. arithmetisches Mittel der Merkmalswerte: $\bar{x} = \frac{1}{IJK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$
- empirische Mittelwerte in den Stufen des Faktors A: $\bar{x}_{A\,i} = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$
- empirische Mittelwerte in den Stufen des Faktors B: $\bar{x}_{B\,j} = \frac{1}{IK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$
- empirische Mittelwerte in den Faktorstufenkombinationen ij: $\bar{x}_{ij} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}$

2. Streuungszerlegung vornehmen: $SQ = SQ_A + SQ_B + SQ_{AB} + SQ_R$
   - $SQ = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(x_{ijk} - \bar{x})^2$: Gesamtstreuung
   - $SQ_A = JK\sum_{i=1}^{I}(\bar{x}_{A\,i} - \bar{x})^2$: durch den Faktor A verursachte Streuung
   - $SQ_B = IK\sum_{j=1}^{J}(\bar{x}_{B\,j} - \bar{x})^2$: durch den Faktor B verursachte Streuung
   - $SQ_{AB} = K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{A\,i} - \bar{x}_{B\,j} + \bar{x})^2$: durch Wechselwirkung zw. A u. B verursachte Streuung
   - $SQ_R = SQ - SQ_A - SQ_B - SQ_{AB}$: zufällige Streuung bzw. Reststreuung
3. Streuungen in empirische Varianzen umrechnen:

   $S_A^2 = \frac{SQ_A}{I-1}$, $S_B^2 = \frac{SQ_B}{J-1}$, $S_{AB}^2 = \frac{SQ_{AB}}{(I-1)(J-1)}$, $S_R^2 = \frac{SQ_R}{IJ(K-1)}$
4. einseitige F-Tests durchführen

   H_0: $\sigma_A^2 \le \sigma_R^2$
   H_1: $\sigma_A^2 > \sigma_R^2$
   Teststatistik: $F_A = \frac{S_A^2}{S_R^2}$

   H_0: $\sigma_B^2 \le \sigma_R^2$
   H_1: $\sigma_B^2 > \sigma_R^2$
   Teststatistik: $F_B = \frac{S_B^2}{S_R^2}$

   H_0: $\sigma_{AB}^2 \le \sigma_R^2$
   H_1: $\sigma_{AB}^2 > \sigma_R^2$
   Teststatistik: $F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_R^2}$

Multiple Mittelwertvergleiche

gegeben: I Stichproben normalverteilter Variablen gleicher Varianz, insgesamt N Werte
empirische Mittelwerte $\bar{x}_i \ne \bar{x}_j$

H_0: $\mu_i = \mu_j$
H_1: $\mu_i \ne \mu_j$
Umfänge der beiden miteinander zu vergleichenden Stichproben i und j: N_i, N_j

- multipler (m-facher) t-Test mit Bonferroni-Korrektur:
  gewünscht: multiple Irrtumswahrscheinlichkeit α

  Grenzdifferenz: $g_{ij} = t_{1-\alpha'/2}\sqrt{\frac{s_i^2}{N_i} + \frac{s_j^2}{N_j}}$

  s_i^2, s_j^2: empirische Varianzen der Stichproben i und j
  $t_{1-\alpha'/2}$: $(1-\alpha'/2)$-Quantil der t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad $f = N_i + N_j - 2$
  $\alpha' = 1 - (1-\alpha)^{1/m} \approx \alpha/m$

- Scheffé-Test für paarweise Vergleiche:

  Grenzdifferenz: $g_{ij} = \sqrt{(I-1)\left(\frac{1}{N_i} + \frac{1}{N_j}\right)s_R^2\, F_{1-\alpha}}$

s_R^2: zufallsbedingte empirische Varianz
$F_{1-\alpha}$: $(1-\alpha)$-Quantil der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden $f_1 = I - 1$ und $f_2 = N - I$

- Tukey-Kramer-Test für paarweise Vergleiche:

  Grenzdifferenz: $g_{ij} = q_{1-\alpha} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N_i} + \frac{1}{N_j}\right) s_R^2}$

  s_R^2: zufallsbedingte empirische Varianz
  $q_{1-\alpha}$: $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilung der studentisierten Variationsbreite mit den Parametern I und $f = N - I$

H_0 wird verworfen, falls $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > g_{ij}$.

Optimaler Stichprobenumfang

- Intervallschätzung für den Erwartungswert normalverteilter Variablen:

  $$N \geq \left(t_{1-\alpha/2} * \frac{s*}{\Delta x}\right)^2$$

  s*: Mindestgröße der empirischen Standardabweichung s
  $t_{1-\alpha/2}$*: $t_{1-\alpha/2}$ für $N \to \infty$
  Δx: gewünschte Genauigkeit

- Einstichproben-t-Test (Parametertest für den Erwartungswert)

  $$N \geq \frac{s*^2 (t_{1-\alpha/2} * + t_{1-\beta} *)^2}{\Delta^2}$$

  s*: Mindestgröße der empirischen Standardabweichung s
  $t_{1-\alpha/2}$* und $t_{1-\beta}$*: $t_{1-\alpha/2}$ und $t_{1-\beta}$ für $N \to \infty$
  Δ: Mindestabweichung, die erkannt werden soll

- Zweistichproben-t-Test:

  $$N \geq \frac{2\, s*^2 (t_{1-\alpha/2} * + t_{1-\beta} *)^2}{\Delta^2}$$

  s*: Mindestgröße der empirischen Standardabweichung s
  $t_{1-\alpha/2}$* und $t_{1-\beta}$*: $t_{1-\alpha/2}$ und $t_{1-\beta}$ für $N \to \infty$
  Δ: Mindestdifferenz, die erkannt werden soll