Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Stirling-Motor

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalte: Vielteilchensysteme, makroskopische Zustandsgrößen, Zustandsgleichung des idealen Gases, isobare, isochore und isotherme Zustandsänderung, Wärme-Kraft-Maschinen, p-V-Diagramm, Arbeitsdiagramm, Wirkungsgrad

Gliederung:

1 Thermodynamische Grundlagen ... 1
1.1 Makroskopische Zustandsgrößen ... 1
1.2 Die Zustandsgleichung des idealen Gases ... 2
1.3 Wärme-Kraft-Maschinen ... 3
1.4 Isotherme Expansion eines Gases ... 4
1.5 Isotherme Kompression eines Gases ... 5
2 Der Stirling-Motor ... 6
2.1 Arbeitsdiagramm ... 6
2.2 Wirkungsgrad ... 9

1 Thermodynamische Grundlagen

1.1 Makroskopische Zustandsgrößen

Statt des Begriffes Thermodynamik wird häufig der Begriff Wärmelehre verwendet. Dies ist insofern irreführend, als sich die Thermodynamik keineswegs nur mit der Wärmeenergie befasst. Der eigentliche Gegenstand der Thermodynamik sind **Vielteilchensysteme**. Wir selbst sind Vielteilchensysteme und wir sind von solchen Systemen umgeben. So besteht selbst eine für uns geringe Menge an Materie wie ein Kubikzentimeter Luft bereits aus rund 10^{19} Teilchen.

In der Thermodynamik wird von einer detaillierten Betrachtung der einzelnen Bestandteile von Vielteilchensystemen abgesehen. Stattdessen wird davon ausgegangen, dass sich die physikalischen Eigenschaften der Systeme hinreichend gut durch einige wenige **makroskopische Zustandsgrößen** wie Druck, Temperatur oder Dichte charakterisieren lassen. Zusammenhänge zwischen diesen Zustandsgrößen werden durch **Zustandsgleichungen** beschrieben. Ein Beispiel wird im Abschnitt 1.2 erläutert.

Nachfolgend sei beispielhaft ein geschlossenes Gefäß betrachtet, in dem sich ein Gas befindet. Gase sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Atome oder Moleküle, aus denen sie bestehen, weitgehend unabhängig voneinander und regellos durch den gesamten Raum, der ihnen zur Verfügung steht, bewegen. Trifft ein Teilchen auf die Gefäßwand, so übt es bei diesem Stoß kurzzeitig eine Kraft auf die Wand aus bzw. überträgt es einen Impuls. Die makroskopische Zustandsgröße **Druck** ist definiert, als

$$\text{Druck} = \frac{\text{durch Teilchenstöße übertragener Impuls}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} . \qquad (1)$$

Vergrößert man das Volumen ohne dass sich dabei die Geschwindigkeit der Teilchen ändert, so bedeutet dies, dass die Teilchen bei gleicher Geschwindigkeit längere Wege zwischen zwei Stößen auf die Gefäßwand zurücklegen müssen. Die Stöße werden seltener bzw. der Druck sinkt. Es ist

$$p \sim \frac{1}{V} \text{ bzw. } p\,V = \text{const..} \qquad (2)$$

Erhöht sich bei konstantem Volumen die Teilchengeschwindigkeit, so werden die Stöße häufiger und der Druck steigt. Als Maß für die Teilchengeschwindigkeit, genauer gesagt für die mittlere kinetische Energie der Teilchen, dient die makroskopische Zustandsgröße **Temperatur**. Es gilt

$$p \sim T. \qquad (3)$$

1.2 Die Zustandsgleichung des idealen Gases

In Form der Proportionalitätsbeziehungen 2 und 3 sind erste Zusammenhänge zwischen makroskopischen Zustandsgrößen formuliert. Sie gelten genau genommen nur für das **ideale Gas**. In diesem besitzen die Teilchen kein Eigenvolumen und üben abgesehen von kurzzeitigen Stößen keine Kräfte aufeinander aus. Auch wenn in der Realität kein ideales Gas in diesem Sinne existiert, verhalten sich doch viele reale Gase - z. B. diejenigen, aus denen die Luft besteht - unter den für uns üblichen Bedingungen näherungsweise so, als ob sie ideal wären.

Der Zustand des idealen Gases wird durch Druck, Volumen und Temperatur beschrieben. Wie diese drei Größen miteinander verknüpft sind, wird durch die **Zustandsgleichung des idealen Gases** ausgedrückt. Für diese sind zwei Formulierungen üblich, die beide dieselbe Proportionalitätsbeziehung ausdrücken, nämlich

$$p \sim \frac{T}{V} \text{ bzw. } p\,V \sim T. \qquad (4)$$

Die angesprochenen Varianten unterscheiden sich darin, wie die Gasmenge erfasst wird. Wird die Gasmenge durch die Anzahl der Teilchen angegeben, ergibt sich die Formulierung

$$p\,V = N\,k\,T \qquad (5)$$

mit N: Anzahl der Teilchen
k: Boltzmann-Konstante (rund $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

Wird die Gasmenge durch die Mol-Anzahl angegeben, ergibt sich die Formulierung

$$p\,V = n\,R\,T \qquad (6)$$

mit n: Anzahl Mol
R: Gaskonstante (rund 8,31 J K^{-1} mol^{-1}).

Je nachdem, ob während einer Zustandsänderung eine der Zustandsvariablen p, V oder T konstant bleibt und welche dies ist, unterscheidet man die folgenden speziellen Formen der Zustandsänderung:

- **isobar**: Die Zustandsänderung erfolgt bei konstantem Druck (p = const.).
- **isochor**: Die Zustandsänderung erfolgt bei konstantem Volumen (V = const.).
- **isotherm**: Die Zustandsänderung erfolgt bei konstanter Temperatur (T = const.).

Die Vorgänge in Wärme-Kraft-Maschinen (Abschnitt 1.3) werden üblicherweise in einem **p-V-Diagramm** dargestellt. In einem solchen Diagramm wird der Druck p über dem Volumen V aufgetragen. Jeder Punkt im p-V-Diagramm entspricht einer Kombination aus einem Volumen- und einem Druckwert und beschreibt damit anhand dieser beiden Zustandsgrößen, in welchem Zustand sich das sogenannte Arbeitsmedium der Maschine aktuell befindet.

Erfährt das Arbeitsmedium der Maschine eine isobare Zustandsänderung, so ergibt sich im p-V-Diagramm eine Linie, die parallel zur V-Achse verläuft (Abbildung 1 links). Diese Linie wird als **Isobare** bezeichnet. Erfolgt die Zustandsänderung isochor, so erhält man eine Linie (eine **Isochore**), die parallel zur p-Achse verläuft (Abbildung 1 Mitte). Bei einer isothermen Zustandsänderung gilt p ~ 1/V. Im p-V-Diagramm verläuft die Zustandsänderung in diesem Fall entlang eines Hyperbelabschnitts (Abbildung 1 rechts), der als **Isotherme** bezeichnet wird.

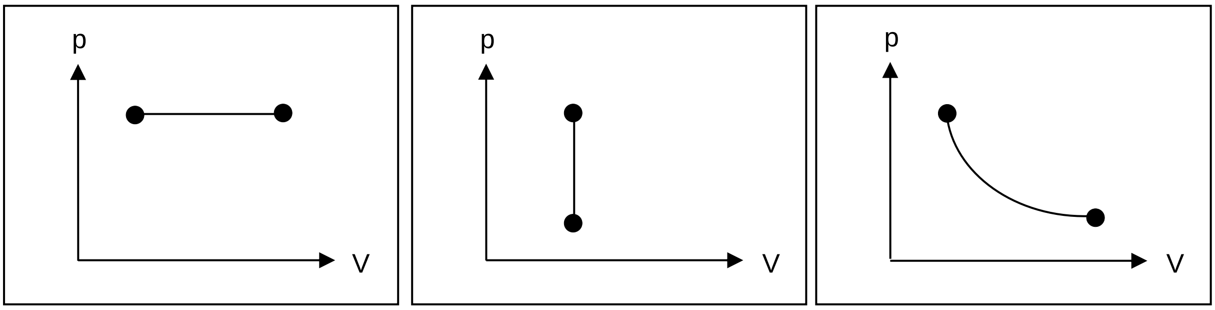

Abbildung 1: Isobare, isochore und isotherme Zustandsänderung im p-V-Diagramm. Anfangs- und Endzustand sind markiert.

1.3 Wärme-Kraft-Maschinen

Wärme-Kraft-Maschinen dienen dazu, Wärmeenergie in mechanische Energie umzuwandeln. Das Funktionsprinzip einer Wärme-Kraft-Maschine ist in Abbildung 2 dargestellt.

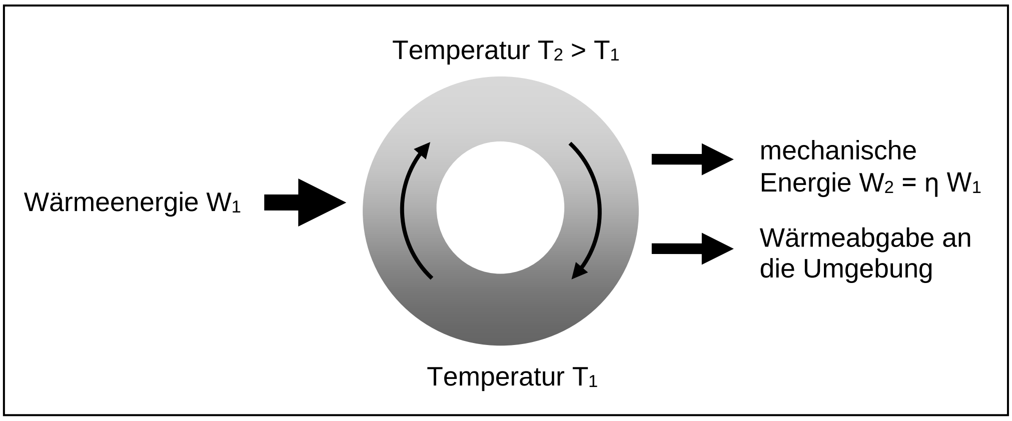

Abbildung 2: Funktionsprinzip einer Wärme-Kraft-Maschine.

Zunächst wird einem Arbeitsmedium die Energie W_1 zugeführt. Im Fall des Stirling-Motors beispielsweise kann als Arbeitsmedium Luft dienen. Das Arbeitsmedium erwärmt sich durch die Energiezufuhr von einer Temperatur T_1 auf eine Temperatur T_2. Anschließend kühlt es sich wieder auf die Ausgangstemperatur T_1 ab. Dabei wird Arbeit verrichtet (ein Kolben aus einem Zylinder gedrückt) bzw. nutzbare mechanische Energie freigesetzt. Diese ist hier mit W_2 bezeichnet.

Vorausgesetzt, dass keine Energieverluste, beispielsweise durch Reibung, auftreten, gibt das Arbeitsmedium bei seiner Abkühlung so viel Energie ab, wie ihm bei seiner Erwärmung zugeführt worden ist. Da in der Praxis ein Teil dieser Energie in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben wird, ist die nutzbare mechanische Energie W_2 kleiner als die zugeführte Energie W_1. Das Verhältnis beider Größen wird als der **Wirkungsgrad** η der Maschine bezeichnet:

$$\eta = \frac{\text{nutzbare mechanische Energie } W_2}{\text{zugeführte Energie } W_1} \ . \tag{7}$$

Aus $W_2 < W_1$ folgt $\eta < 1$.

1.4 Isotherme Expansion eines Gases

Ein Gas des Volumens V, der Temperatur T und des Drucks p befinde sich in einem Gefäß, das an einer Seite durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen wird (Abbildung 3 oben). Durch Ausdehnung des Gases wird der Kolben verschoben. Grund dafür ist, dass das Gas den Druck p auf den Kolben ausübt. Ist dessen Fläche A, so ist die Kraft, die das Gas auf den Kolben ausübt,

$$F = p\,A.$$

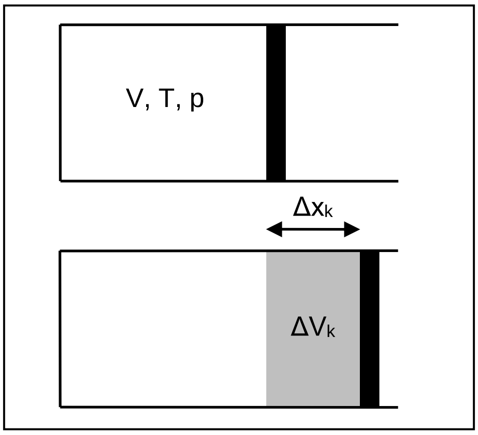

Abbildung 3: Expansion bzw. Ausdehnung eines Gases.

Während der Verschiebung nimmt der Druck kontinuierlich ab. Nur über einen kleinen Verschiebungsweg Δx_k bzw. bei einer geringen Ausdehnung um ΔV_k (Abbildung 3 unten) kann von einer wenigstens näherungsweise konstanten Kraft $F_k = p_k\,A$ ausgegangen werden, sodass sich die bei dieser Verschiebung verrichtete Arbeit als

$$\begin{aligned} \Delta W_k &\approx -\,p_k\,A\,\Delta x_k \\ &\approx -\,p_k\,\Delta V_k \end{aligned}$$

berechnen lässt. Warum das Minuszeichen? Einerseits vergrößert sich das Volumen, sodass die Volumenänderung ΔV_k positiv ist. Andererseits wird durch das Gas Arbeit verrichtet bzw. Energie abgegeben, sodass die Energieänderung ΔW_k negativ ausfällt. Die rechte Seite der Gleichung muss daher mit einem Minuszeichen versehen werden.

Die gesamte Verschiebungsarbeit bei einer größeren Ausdehnung von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 ergibt sich als

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \\ &\approx - \sum_{k=1}^{n} p_k \; \Delta V_k \end{aligned}$$

Diese Näherung wird umso besser, je kürzer die Intervalle Δx_k sind, in die der Verschiebungsweg unterteilt wird. Die Verschiebungsarbeit W ergibt sich exakt, wenn die Länge dieser Intervalle gegen null und ihre Anzahl damit gegen unendlich geht:

$$W = - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} p_k \; \Delta V_k \; .$$

Dieser Grenzwert wird in der Mathematik auch als Integral bezeichnet und abkürzend geschrieben als

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \; dV \; . \tag{8}$$

Für ein ideales Gas kann der Integrand p gemäß der Zustandsgleichung des idealen Gases (Abschnitt 1.2, Gleichung 6) wie folgt ersetzt werden:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{n R T}{V} \; dV \; .$$

Handelt es sich speziell um eine isotherme Zustandsänderung (T = const.), so ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= - n R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= - n R T \left[\ln(V_2) - \ln(V_1) \right] \\ &= - n R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1} \right) . \end{aligned} \tag{9}$$

1.5 Isotherme Kompression eines Gases

Ein Gas des Volumens V, der Temperatur T und des Drucks p befinde sich in einem Gefäß, das an einer Seite durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen wird (Abbildung 4 oben). Durch Verschieben des Kolbens wird das Gas komprimiert. Dazu muss eine Kraft auf den Kolben ausgeübt werden. Ist dessen Fläche A, so entsteht der Druck

$$p = \frac{F}{A} \; ,$$

der sich auf das Gas überträgt.

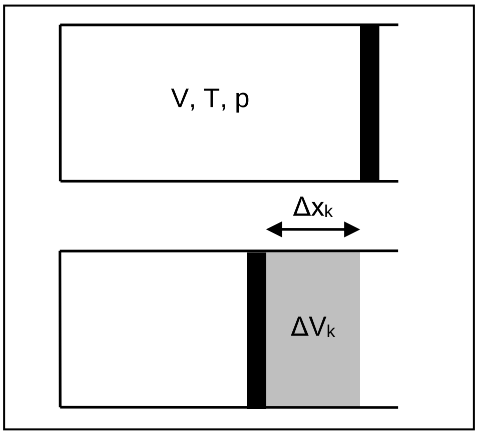

Abbildung 4: Kompression bzw. Verdichtung eines Gases.

Während der Verschiebung nimmt der Gasdruck kontinuierlich zu. Entsprechend wächst auch die aufzuwendende Kraft kontinuierlich an. Nur über einen kleinen Verschiebungsweg Δx_k bzw. bei einer geringen Verdichtung um ΔV_k (Abbildung 4 unten) kann von einer wenigstens näherungsweise konstanten Kraft $F_k = p_k A$ ausgegangen werden, sodass sich die bei dieser Verschiebung verrichtete Arbeit als

$$\begin{aligned} \Delta W_k &\approx - p_k A \Delta x_k \\ &\approx - p_k \Delta V_k \end{aligned}$$

berechnen lässt. Warum das Minuszeichen? Einerseits verringert sich das Volumen, sodass die Volumenänderung ΔV_k negativ ausfällt. Andererseits wird an dem Gas Arbeit verrichtet bzw. wird dem Gas Energie zugeführt, sodass die Energieänderung ΔW_k positiv ist. Um dies mathematisch zu gewährleisten, muss die rechte Seite der Gleichung mit einem Minuszeichen versehen werden.

Analog zu den im Abschnitt 1.4 erläuterten Berechnungen ergibt sich für die isotherme Verdichtung vom Anfangsvolumen V_2 auf das Endvolumen V_1 die zu verrichtende Arbeit als

$$\begin{aligned} W' &= - \int_{V_2}^{V_1} p \, dV \\ &= - n R T \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} \\ &= - n R T [\ln(V_1) - \ln(V_2)] \\ &= n R T [\ln(V_2) - \ln(V_1)] \\ &= n R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

2 Der Stirling-Motor

2.1 Arbeitsdiagramm

Im einfachsten Fall ist das Arbeitsmedium des Stirling-Motors Luft. Diese kann in ausreichender Näherung als ideales Gas angesehen werden.

Der im Abschnitt 1.3 dargestellt Kreisprozess wird in vier Abschnitte, sogenannte Takte, unterteilt. In diesen Takten erfährt das Arbeitsmedium die folgenden Zustandsänderungen:

- Takt 1: Expansion bei konstanter Temperatur T_2
  Die Temperatur des Arbeitsmediums ist durch Zufuhr der Wärmenergie W_1 auf die Temperatur T_2 gestiegen (vgl. Abbildung 2). Es dehnt sich vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2 aus und verschiebt dabei den sogenannten Arbeitskolben. In dieser Phase wird durch das Arbeitsmedium die mechanische Arbeit

  $$W = -\, n\, R\, T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{11}$$

  verrichtet (Abschnitt 1.4). Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Energiewandlung vollständig erfolgt, d. h. dass $|W|$ gleich der zugeführten Energie W_1 ist bzw.

  $$W_1 = n\, R\, T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{12}$$

  Da die Zustandsänderung isotherm ist, wird sie im p-V-Diagramm durch einen Hyperbelabschnitt, eine Isotherme, dargestellt (Abbildung 5).

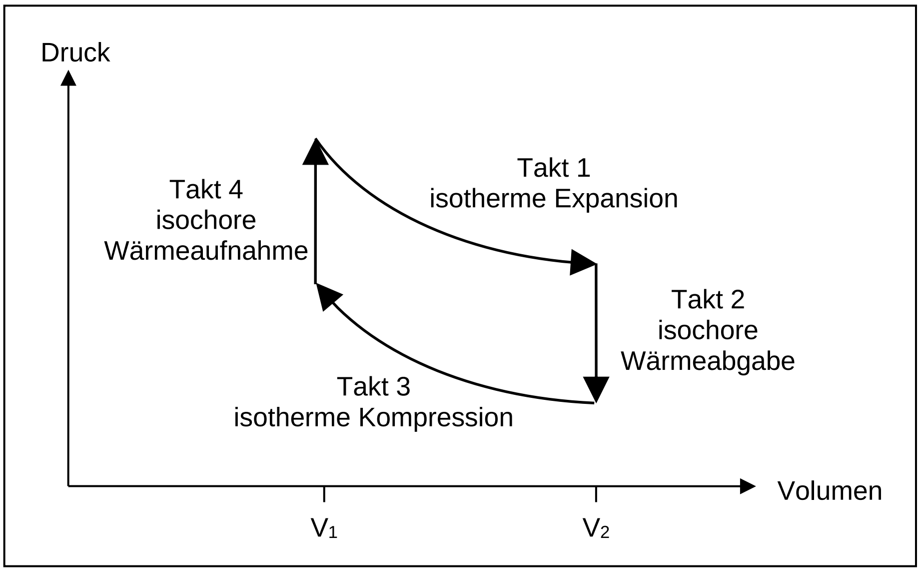

Abbildung 5: Idealer Stirling-Kreisprozess im p-V-Diagramm.

- Takt 2: Wärmeabgabe bei konstantem Volumen V_2
  Das Arbeitsmedium hat sich auf das Volumen V_2 ausgedehnt. Nun gibt es Wärmeenergie ab, wodurch es sich von der Temperatur T_2 auf die Temperatur T_1 abkühlt. Gleichzeitig sinkt der Druck. Im p-V-Diagramm ergibt sich eine Isochore.

- Takt 3: Kompression bei konstanter Temperatur T_1
  Das Arbeitsmedium wird komprimiert. Dazu muss an ihm die Arbeit verrichtet werden bzw. muss ihm die mechanische Energie

  $$W' = n\, R\, T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{13}$$

zugeführt werden (Abschnitt 1.5). Durch gleichzeitige Abgabe weiterer Wärmeenergie bleibt seine Temperatur jedoch konstant.

- Takt 4: Wärmezufuhr bei konstantem Volumen V_1
  Das Arbeitsmedium ist auf das Volumen V_1 komprimiert worden. Es nimmt jetzt Wärmeenergie auf und erwärmt sich wieder auf die Temperatur T_2, so dass der Zyklus von Neuem mit Takt 1 beginnen kann.

Nur im Takt 1, bei der Expansion des Arbeitsmediums von V_1 auf V_2, wird durch den Motor Arbeit verrichtet. Der Betrag dieser Arbeit berechnet sich gemäß Gleichung 8 als bestimmtes Integral des Drucks über das Volumen:

$$|W| = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV \, .$$

Das bestimmte Integral einer Funktion entspricht einer Fläche unter ihrer Funktionskurve. Da die Zustandsänderung im Takt 1 durch die obere Isotherme in Abbildung 5 dargestellt wird, entspricht der Betrag der verrichteten Arbeit der Fläche unter der oberen Isotherme im p-V-Diagramm.

Ein Teil W' der abgegebenen mechanischen Energie W wird in einem Schwungrad oder einer Schwungscheibe in Form von Rotationsenergie zwischengespeichert, um dem Arbeitsmedium im Takt 3 wieder zugeführt zu werden, wenn es verdichtet werden muss. Als nutzbare mechanische Energie bleibt, unter Vernachlässigung möglicher Verluste, beispielsweise durch Reibung,

$$W_2 = |W| - W'. \qquad (14)$$

Da die Zustandsänderung im Takt 3 durch die untere Isotherme in Abbildung 5 dargestellt wird, entspricht W‘ der Fläche unter der unteren Isotherme im p-V-Diagramm. Die nutzbare mechanische Arbeit bzw. Energie ergibt sich als Differenz der beiden angesprochenen Flächen und entspricht damit der Fläche, die im p-V-Diagramm durch die beiden Isothermen und die beiden Isochoren umschlossen wird (Abbildung 6). Die nutzbare mechanische Arbeit pro Zyklus ist im p-V-Diagramm damit als Fläche zu identifizieren. Das p-V-Diagramm, das den Kreisprozess zeigt, wird daher auch als das **Arbeitsdiagramm** des Motors bezeichnet.

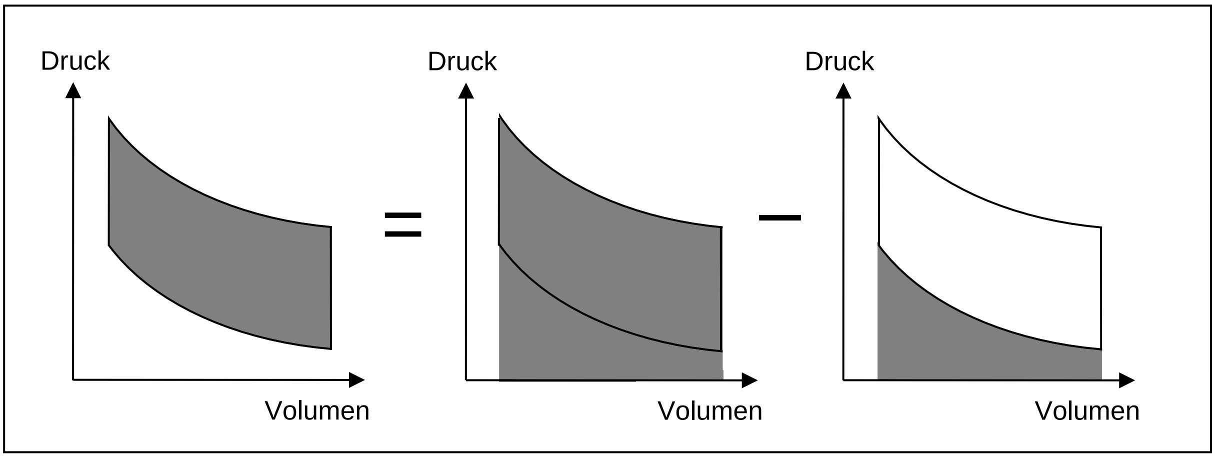

Abbildung 6: Nutzbare mechanische Arbeit als Differenz des Betrags der in Takt 1 durch das Arbeitsmedium verrichteten Arbeit und der in Takt 3 dem Arbeitsmedium zugeführten mechanischen Arbeit.

2.2 Wirkungsgrad

Wie im vorangehenden Abschnitt ausgeführt, ist die nutzbare mechanische Energie pro Zyklus

$W_2 = |W| - W'$

(Gleichung 14). Unter Anwendung der Gleichungen 11 und 13 ergibt sich

$$W_2 = n\,R\,T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - n\,R\,T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= n\,R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) (T_2 - T_1).$$

Der Wirkungsgrad berechnet sich als

$$\eta = \frac{W_2}{W_1}$$

(Gleichung 7). Unter Verwendung der Gleichung 12 für W_1 ergibt sich

$$\eta = \frac{n\,R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)(T_2 - T_1)}{n\,R\,T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

$$= 1 - \frac{T_1}{T_2}\,. \qquad (15)$$

Diese Gleichung zeigt, dass ein Wirkungsgrad von 1 nur unter Bedingungen auftreten würde, die in der Realität nicht herzustellen sind, nämlich für $T_1 = 0$ und/oder $T_2 \to \infty$.

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de