Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Kondensatoren in der Gleichstromtechnik

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalte: Kapazität, Dielektrikum, relative Permittivität, kapazitive Feuchtemessung, Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren, elektrisches Feld, Linearspeicher, Auf- und Entladen eines Kondensators, unbeschränktes und beschränktes Wachstum, gespeicherte Energie

Gliederung:

1 Einleitung

Bei der Speicherung elektrischer Energie denkt man üblicherweise zuerst an Batterien und Akkumulatoren („Akkus“). Das Auf- und Entladen dieser Speicher ist allerdings mit Energiewandlungsprozessen verbunden. Beim Aufladen wird elektrische Energie in chemische Energie gewandelt, beim Entladen wird die chemische in elektrische Energie rückgewandelt. Der Kondensator dagegen kann elektrische Energie ohne Wandlung speichern.

Kondensatoren sind aber nicht nur als Energiespeicher interessant. Die mathematische Beschreibung der Auf- und Entladung von Kondensatoren weist weit über diese spezielle technische Anwendung hinaus. Sie ist beispielhaft für die Beschreibung der Auf- und Entladung von Linearspeichern und von Wachstums- und Zerfallsprozessen. Näheres dazu wird in Abschnitt 4 erläutert.

2 Kapazität

2.1 Definition und Abhängigkeiten

Die einfachste Bauform eines Kondensators besteht aus zwei Platten elektrisch leitenden Materials, die sich gegenüberstehen. Das Schaltsymbol für den Kondensator - zwei parallele Striche gleicher Länge (z. B. in Abbildung 4) - deutet dies an.

Legt man eine elektrische Spannung an einen zuvor ungeladenen Kondensator, so beginnen Elektronen auf diejenige Platte zu fließen, die mit dem Minuspol der Spannungsquelle verbunden ist. Durch die elektrische Kraft bzw. Coulomb-Kraft, die diese negative Ladung ausübt, werden aus der anderen Platte in gleichem Maße Elektronen verdrängt. Dadurch entsteht dort eine vom Betrag her gleich große positive Gegenladung. Die Ladung Q, die der Kondensator auf diese Weise aufnimmt, ist proportional zur anliegenden Spannung U: $Q \sim U$. Möchte man aus einer solchen Proportionalitätsbeziehung eine Gleichung machen, um Berechnungen vornehmen zu können, so muss man eine Proportionalitätskonstante einführen:

$$Q = C\,U. \tag{1}$$

Da die Proportionalitätskonstante C bestimmend für die Ladung und damit elektrische Energie ist, die ein Kondensator aufnehmen kann, erhält sie einen eigenen Namen: C ist die so genannte **Kapazität** des Kondensators. Sie wird in der Einheit 1 C/V = 1 F (**Farad**[1]) angegeben.

Die Kapazität wird von den Abmessungen des Kondensators bestimmt. Sie ist proportional zur Fläche A der Platten und umgekehrt proportional zum Plattenabstand d. Entscheidend für die Kapazität ist außerdem das so genannte **Dielektrikum**, das den Raum zwischen den Kondensatorplatte ausfüllt[2]. Es geht dabei um die Frage, ob sich Materie zwischen den Platten befindet, und wenn ja, um welche Substanz es sich handelt. Kenngröße für das Dielektrikum ist die **relative Permittivität** ε_r, eine dimensionslose Größe, d. h. eine Größe, deren Werte reine Zahlen sind. Es ergibt sich für die Kapazität

$$C = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\frac{A}{d}. \tag{2}$$

ε_0 ist die Influenzkonstante, die beispielsweise auch im Coulomb-Gesetz auftritt ($\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2\ J^{-1}\ m^{-1}$). In Tabelle 1 sind Werte der relativen Permittivität für einige Dielektrika aufgeführt.

Dielektrikum	ε_r
Vakuum	1
Luft	1,0
Papier	3,7
Glas	5 bis 10
Wasser (20°C)	80

Tabelle 1: Beispiele für Werte der relativen Permittivität ε_r.

Die relative Permittivität des Vakuums wird als exakt 1 definiert. Besonders hoch ist die relative Permittivität von Wasser. Kann ein Dielektrikum Wasser aufnehmen, so ist seine relative Permittivität umso

[1] So benannt zu Ehren von Michael Faraday.
[2] Genauer gesagt, welches vom elektrischen Feld des Kondensators durchdrungen wird (→ Abschnitt 3).

höher, je mehr Wasser es enthält. Dies lässt sich für ein Verfahren der Feuchtemessung nutzen, die so genannte **kapazitive Feuchtemessung**. Benötigt wird ein geladener Kondensator, der isoliert ist, sodass die auf ihm gespeichert Ladung Q konstant bleibt. An diesem Kondensator lässt sich die Spannung $U = Q/C$ messen (Gleichung 1). Da die Kapazität C von der relativen Permittivität und damit vom Wassergehalt des Dielektrikums abhängt, ist auch U abhängig vom Wassergehalt des Dielektrikums. Nach geeigneter Eichung des Messgeräts kann die gemessene Spannung in eine Information über die Feuchte des Dielektrikums umgewandelt werden.

2.2 Schaltungen mit mehreren Kondensatoren

2.2.1 Reihenschaltung

Abbildung 1 zeigt die einfachste Variante einer Reihenschaltung, bestehend aus zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2.

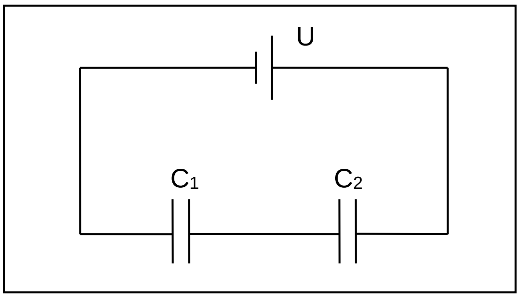

Abbildung 1: Reihenschaltung zweier Kondensatoren.

Auf beiden Kondensatoren muss sich dieselbe Ladung befinden. Wäre dies nicht der Fall, würde eine Ladungsverschiebung für den Ausgleich sorgen. Es ist daher nicht nötig, zwischen Ladungen Q_1 und Q_2 zu unterscheiden: $Q_1 = Q_2 = Q$.

Allerdings liegen im Allgemeinen an den beiden Kondensatoren unterschiedliche Spannungen, am Kondensator 1 die Spannung $U_1 = Q/C_1$ und am Kondensator 2 die Spannung $U_2 = Q/C_2$. Gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel[3] ist

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= Q/C_1 + Q/C_2 \\ &= Q\,(1/C_1 + 1/C_2). \end{aligned}$$

Gleichung 1 zufolge ist $U = Q/C$, wobei C die (Gesamt-)Kapazität der Schaltung ist. Für diese gilt offenbar $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Im allgemeinen Fall von n in Reihe geschalteten Kondensatoren mit den Kapazitäten C_i ($i = 1, \ldots, n$) ist der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\,. \qquad (3)$$

[3] Siehe beispielsweise Skript „Elektrische Schaltungen“ unter aufgabomat.de.

2.2.2 Parallelschaltung

Abbildung 2 zeigt die einfachste Variante einer Parallelschaltung von Kondensatoren. Gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel ist $U_1 = U_2 = U$.

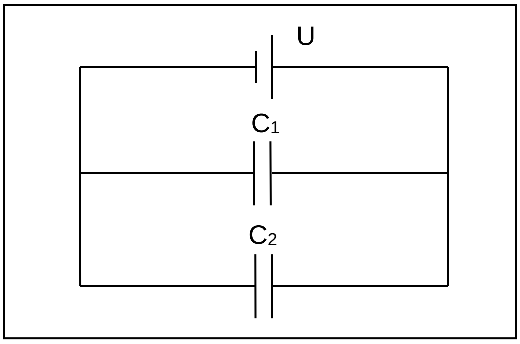

Abbildung 2: Parallelschaltung zweier Kondensatoren.

Die Ladung Q, die von der Spannungsquelle abfließt, verteilt sich auf die beiden Kondensatoren:

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_1 + Q_2 \\
&= C_1 U + C_2 U \\
&= (C_1 + C_2)\, U
\end{aligned}
$$

Gleichung 1 zufolge ist $Q = C\,U$, wobei C die (Gesamt-)Kapazität der Schaltung ist. Für diese ergibt sich im vorliegenden Fall $C = C_1 + C_2$. Allgemein gilt, dass sich die Gesamtkapazität von n parallel geschalteten Kondensatoren mit den Kapazitäten C_i ($i = 1, \ldots, n$) als Summe der Einzelkapazitäten berechnet:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \,. \qquad (4)$$

3 Elektrisches Feld

In Abbildung 3 ist das elektrische Feld eines Plattenkondensators skizziert. Das Feld im Raum zwischen den Kondensatorplatten ist homogen, d. h. es weist überall dieselbe Stärke auf. Kenntlich ist dies an den parallel verlaufenden Feldlinien.

Die **elektrische Feldstärke** $\vec{E}$ erhält man, indem man die elektrische Kraft $\vec{F}_C$, die auf einen positiv geladenen Körper wirkt, durch dessen Ladung q teilt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q} \,. \qquad (5)$$

Wenn das elektrische Feld im Zwischenraum des Kondensators überall gleich ist, bedeutet dies, dass ein elektrisch geladener Körper in diesem Bereich des Raumes überall dieselbe elektrische Kraft erfährt. Unter diesen Bedingungen lässt sich besonders einfach beschreiben und kontrollieren, wie sich elektrisch geladene Teilchen unter der Wirkung der elektrischen Kraft bewegen. Daher wird das homogene elektrische Feld von Kondensatoren praktisch genutzt, um geladene Teilchen abzulenken und/oder zu trennen, beispielsweise bei Elektrophorese und Massenspektrometrie.

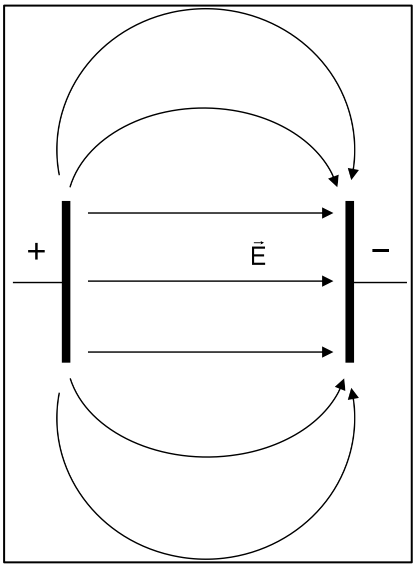

Abbildung 3: Elektrisches Feld eines Plattenkondensators

Der Betrag E der elektrischen Feldstärke im Raum zwischen den Kondensatorplatten lässt sich ermitteln, indem man sich vorstellt, ein Elektron (Elementarladung e) werde von der positiv geladenen Platte zur negativ geladenen Platte verschoben. Die aufzuwendende Kraft ist wegen der Homogenität des Feldes über den gesamten Verschiebungsweg konstant, sodass sich die Verschiebungsarbeit einfach als Produkt aus Kraft F und Weg d berechnen lässt. Berücksichtigt man außerdem, dass der Betrag F der Kraft nach Gleichung 5 dem Produkt von Feldstärke und Ladung entspricht, ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= F\,d \\ &= E\,e\,d. \end{aligned}$$

Dies ist die potenzielle Energie, die das Elektron durch die Verschiebung gewinnt. Die elektrische Spannung ist definiert als Energie pro Ladung[4], bezogen auf das Elektron

$$\begin{aligned} U &= \frac{W}{e} \\ &= E\,d. \end{aligned}$$

Es folgt für den Betrag der elektrischen Feldstärke

$$E = \frac{U}{d}\,. \qquad (6)$$

4 Kondensatoren als Energiespeicher

4.1 Linearspeicher

Kondensatoren sind Linearspeicher. Linearspeicher zeichnen sich dadurch aus, dass der Abfluss (von Energie oder Materie) während ihrer Entladung proportional zum Speicherinhalt ist. Ein einfaches Bei-

[4] Siehe beispielsweise Skript „Elektrische Kraft und elektrisches Feld“ unter aufgabomat.de.

spiel ist ein nach oben hin offener Wasserbehälter, an dessen Basis sich ein Auslass befindet. Linearspeicher existieren jedoch nicht nur als reale, in der Technik genutzte Objekte. Als Linearspeicher lassen sich vielfach auch, zumindest näherungsweise, Teilbereiche bzw. Komponenten natürlicher Systeme beschreiben, beispielsweise in der Hydrologie[5].

4.2 Aufladen eines Kondensators

Zum Aufladen eines Kondensators werden dessen beiden Pole mit denjenigen einer Spannungsquelle verbunden, in der Regel über einen Widerstand R, um die Intensität des Ladestroms zu kontrollieren (Abbildung 4 links). Eine Schaltung, die einen Kondensator und einen ohmschen Widerstand enthält, wird auch **RC-Kreis** oder **RC-Glied** genannt.

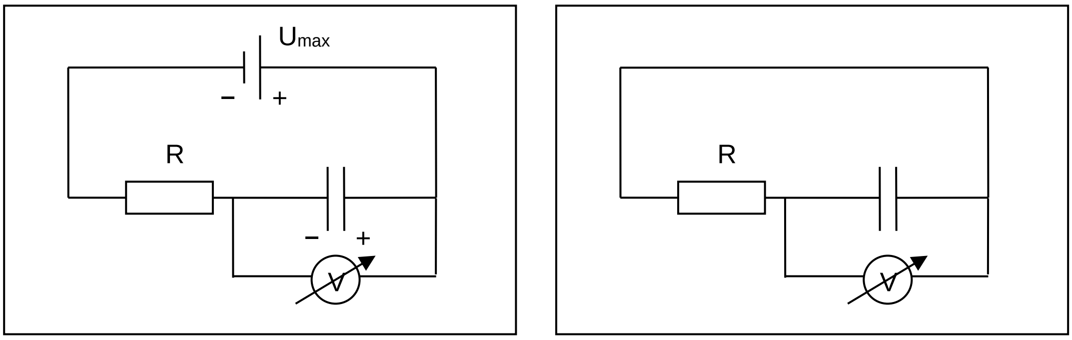

Abbildung 4: Schaltungen zur Auf- und Entladung eines Kondensators.

Während der Aufladung fließt elektrische Ladung auf den Kondensator. Die Ladung ist proportional zur Spannung am Kondensator (Gleichung 1), woraus folgt, dass die Spannung, die mit einem Voltmeter am Kondensator gemessen werden kann, von einem Anfangswert U(0) ausgehend ansteigt. Sie nimmt allerdings maximal den Wert U_{max} an, den die Spannungsquelle vorgibt.

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel[6] teilt sich die Spannung U_{max} auf in die Spannung U(t) am Kondensator und die Spannung am Widerstand R. Letztere ist nach dem Ohmschen Gesetz R I(t):

$$U_{max} = U(t) + R\,I(t). \qquad (7)$$

Die Stromstärke ist definiert als

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Gleichung 1 besagt, dass Q(t) = C U(t) ist. Da die Kapazität C eine Konstante ist, lässt sich auch

$$I(t) = C\,\frac{dU(t)}{dt}$$

schreiben. Es folgt

$$U_{max} = U(t) + R\,C\,\frac{dU(t)}{dt}$$

[5] Eckhardt, K., 2014. Hydrologische Modellierung - Ein Einstieg mithilfe von Excel. Springer Spektrum, Wiesbaden.
[6] Siehe beispielsweise Skript „Elektrische Schaltungen" unter aufgabomat.de.

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{R\,C}\,[U_{max} - U(t)]. \tag{8}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die zeitlich veränderliche Spannung am Kondensator. Inhomogen ist sie durch den Term $U_{max}/(R\,C)$. Der erste Schritt zu ihrer Lösung besteht darin, die allgemeine Lösung $U_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{dU_h(t)}{dt} = -\frac{1}{R\,C}\,U_h(t)$$

zu bestimmen. Diese ergibt sich durch Trennung der Variablen (→ Ingenieurmathematik) als

$$U_h(t) = K\,e^{-\frac{1}{R\,C}t}.$$

K ist eine noch zu bestimmende Konstante.

Für den zweiten Schritt des Lösungsverfahrens gibt es zwei Möglichkeiten. Die eine besteht in der so genannten Variation der Konstanten, die andere darin, eine spezielle bzw. partikuläre Lösung $U_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung zu suchen. Die allgemeine Lösung ergibt sich dann als

$$U(t) = U_h(t) + U_p(t).$$

Dieser Weg wird hier gewählt. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist $U_p(t) = U_{max}$, wie sich durch Einsetzen in Gleichung 8 leicht überprüfen lässt. Folglich ist

$$U(t) = K\,e^{-\frac{1}{R\,C}t} + U_{max}.$$

Für t = 0 ergibt sich $U(0) = K + U_{max}$ bzw. $K = U(0) - U_{max}$. Somit ist

$$\begin{aligned} U(t) &= [U(0) - U_{max}]\,e^{-\frac{1}{R\,C}t} + U_{max} \\ &= U_{max} - [U_{max} - U(0)]\,e^{-\frac{1}{R\,C}t}. \end{aligned} \tag{9}$$

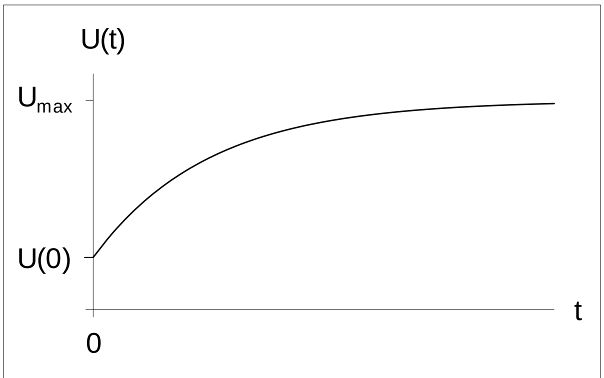

Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der Spannung während der Aufladung eines Kondensators.

Die abschließende Formulierung ist gewählt worden, um den zeitlichen Verlauf der Spannung deutlich zu machen: Von einer Konstanten (U_{max}) wird eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten subtrahiert. Für t = 0 hat letztere den Wert $U_{max} - U(0)$ und es ergibt sich $U(t) = U(0)$. Für t gegen unendlich geht die Exponentialfunktion asymptotisch gegen null und U(t) daher asymptotisch gegen U_{max} (Abbildung 5).

4.3 Entladen eines Kondensators

Zum Entladen eines Kondensators werden dessen beiden Pole elektrisch leitend verbunden, in der Regel über einen Widerstand R, um die Intensität des Entladestroms zu kontrollieren (Abbildung 4 rechts). Im Vergleich zu derjenigen Schaltung, die der Aufladung des Kondensators dient (Abbildung 4 links), ist die Spannungsquelle entfernt worden, deren Spannung im vorigen Abschnitt mit U_{max} bezeichnet worden ist. Wird U_{max} aus Gleichung 7

$$U_{max} = U(t) + R\, I(t)$$

entfernt, ergibt sich

$$0 = U(t) + R\, I(t)$$

oder, unter Verwendung der Beziehungen I = dQ/dt und Q(t) = C U(t) (Gleichung 1),

$$\begin{aligned} U(t) &= -R\, I(t) \\ &= -R\, \frac{dQ(t)}{dt} \\ &= -R\, C\, \frac{dU(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{R\,C}\, U(t). \qquad (10)$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die zeitlich variable Spannung U(t) am Kondensator. Gelöst wird sie durch Trennung der Variablen (→ Ingenieurmathematik). Das Ergebnis lautet

$$U(t) = U(0)\; e^{-\frac{1}{R\,C}t}. \qquad (11)$$

U(0) ist die Spannung zu Beginn der Entladung, zum Zeitpunkt t = 0. Von diesem Wert aus nimmt die Spannung exponentiell ab und geht asymptotisch gegen null (Abbildung 6).

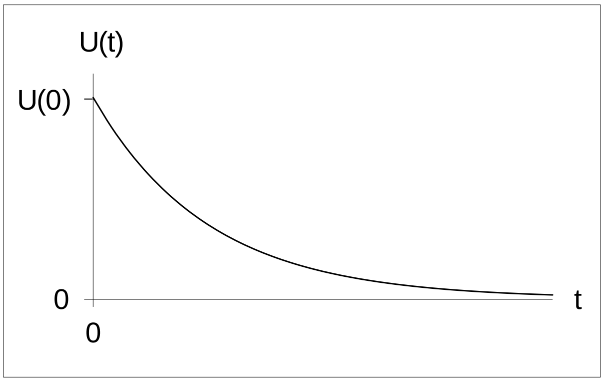

Abbildung 6: Zeitlicher Verlauf der Spannung während der Entladung eines Kondensators.

4.4 Analogie zur Beschreibung von Wachstumsprozessen

4.4.1 Unbeschränktes Wachstum

Gegeben: Größe N(0) einer Population zum Zeitpunkt t = 0
Gesucht: Größe N(t) der Population zu beliebigen Zeitpunkten t > 0

Je mehr Individuen die Population bereits umfasst, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für Nachwuchs. Ansatz:

Änderung der Populationsgröße mit der Zeit ~ Populationsgröße

$$\frac{dN(t)}{dt} = k\,N(t) \tag{12}$$

Die Einheit von k ist $[k] = [t]^{-1}$, also beispielsweise $1\ s^{-1}$, wenn die Zeit t in Sekunden angegeben wird.

Ersetzt man in Gleichung 12 die Populationsgröße N durch die elektrische Spannung U und setzt $k = -1/(R\,C)$, so erhält man Gleichung 10 für die zeitlich veränderliche Spannung bei der Entladung eines Kondensators. Analog ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung 12

$$N(t) = N(0)\,e^{k\,t}. \tag{13}$$

Für k > 0 ist $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$. Die Population kann unendlich groß werden, das Wachstum ist unbegrenzt.
Für k < 0 ist $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$. In diesem Fall beschreibt Gleichung 13 das Aussterben der Population.

Die Populationsgröße N könnte auch durch die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne in einem radioaktiven Präparat ersetzt und k mit der Zerfallskonstante identifiziert werden. Es ergäbe sich dann die Grundgleichung zur Beschreibung des radioaktiven Zerfalls. Hier zeigt sich eine der großen Stärken der Verwendung der Mathematik in Technik und Naturwissenschaften: Es ist mit ihrer Hilfe möglich, unterschiedlichste Phänomene in ein und derselben Weise zu beschreiben.

4.4.2 Beschränktes Wachstum

Gegeben: Größe N(0) einer Population zum Zeitpunkt t = 0, maximale Populationsgröße N_{max}
Gesucht: Größe N(t) der Population zu beliebigen Zeitpunkten t > 0

Die Ressourcen für das Populationswachstum sind begrenzt, sodass die Individuenzahl höchstens auf N_{max} steigen kann. Das Wachstum wird bei steigender Individuenzahl gebremst. Ansatz:

Änderung der Populationsgröße ~ Differenz zwischen maximaler und aktueller Populationsgröße

$$\frac{dN(t)}{dt} = k\,[N_{max} - N(t)] \tag{14}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Populationsgröße N durch die elektrische Spannung U und setzt $k = 1/(R\,C)$, so erhält man Gleichung 8 für die zeitlich veränderliche Spannung bei der Aufladung eines Kondensators. Analog ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung 14

$$N(t) = N_{max} - [N_{max} - N(0)]\, e^{-k\,t}. \qquad (15)$$

Zum Zeitpunkt t = 0 ist die Populationsgröße N(0), für t gegen unendlich geht sie wegen des negativen Exponenten der Exponentialfunktion asymptotisch gegen N_{max}.

4.5 Gespeicherte Energie

4.5.1 Berechnung mithilfe der Kapazität und der Maximalspannung

Ein anfänglich ungeladener Kondensator werde durch eine Spannungsquelle mit der konstanten Spannung U_{max} aufgeladen. Während die Ladung dQ auf den Kondensator fließt, erhöht sich die in ihm gespeicherte Energie W um

$$\begin{aligned} dW &= U\, dQ \\ &= U\, C\, dU. \end{aligned}$$

Dies folgt aus der Definition der elektrischen Spannung als Energie pro Ladung und aus der Proportionalität von Ladung und Spannung U am Kondensator (Gleichung 1).

Während der Aufladung nimmt die Spannung vom Wert U(0) = 0 ausgehend kontinuierlich zu und nähert sich asymptotisch dem Wert U_{max} (Gleichung 9). Die insgesamt aufgenommene Energie berechnet sich als

$$\begin{aligned} W &= C \int_0^{U_{max}} U\, dU \\ &= C \left[\frac{1}{2} U^2 \right]_0^{U_{max}} \\ &= \tfrac{1}{2}\, C\, U_{max}^2. \qquad (16) \end{aligned}$$

4.5.2 Berechnung mithilfe der zeitlich variablen Spannung

Verbindet man die beiden Pole eines aufgeladenen Kondensators mit einem elektrischen Leiter (Abbildung 4 rechts), so fließen Elektronen vom negativen Pol des Kondensators zum positiven Pol, um einen Ladungsausgleich herzustellen. Die Geschwindigkeit des Entladeprozesses wird vom elektrischen Widerstand R des Stromkreises und der Kapazität C des Kondensators bestimmt (Gleichung 11).

Der Kondensator stellt die Spannungsquelle dar, die den Entladestrom hervorruft. Für den Strom I(t) gilt nach dem Ohmschen Gesetz

$$I(t) = \frac{U(t)}{R}.$$

Die zeitlich veränderliche Leistung P(t) der fließenden Ladungsträger ist

$$P(t) = U(t)\, I(t)$$

$$= \frac{U^2(t)}{R} \, .$$

Die Spannung U(t) nimmt ausgehend vom Wert U(0) exponentiell ab und nähert sich asymptotisch dem Wert null. Zur Berechnung der elektrischen Energie W, die während der Entladung des Kondensators freigesetzt wird, muss daher über einen unendlich langen Zeitraum integriert werden. Es ergibt sich das uneigentliche Integral (→ Ingenieurmathematik)

$$W = \int_0^\infty P(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^\infty U^2(t)\, dt \, . \qquad (17)$$

Der mathematische Ausdruck für U(t) ist Gleichung 11 zu entnehmen, kann aber auch, sollte die Kapazität des Kondensators und/oder der elektrische Widerstand des Stromkreises nicht bekannt sein, durch eine nichtlineare Regressionsanalyse aus gemessenen Spannungswerten gewonnen werden.

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de