Prof. Dr. Klaus Eckhardt

Dimension und Einheit

veröffentlicht im Internet unter aufgabomat.de

Inhalte: Dimensionen, Dimensionsanalyse, dimensionslose Größen, Basiseinheiten, zusammengesetzte Einheiten, Einheitenumrechnung, Zehnerpotenzen von Einheiten

Gliederung:

1 Dimension

Die **Dimension** dim(X) einer physikalischen Größe X bezeichnet, *was* durch diese Größe beschrieben wird. Die physikalischen Größen Wegstrecke, Wellenlänge und Brennweite beispielsweise beschreiben alle eine Länge bzw. besitzen die Dimension Länge, die physikalischen Größen Halbwertszeit und Schwingungsdauer die Dimension Zeit.

Um die uns bekannte Welt physikalisch zu beschreiben, genügen sieben Dimensionen (Tabelle 1).

Dimension	Symbol
Länge	L
Zeit	T
Masse	M
Temperatur	Θ
elektrische Stromstärke	I
Stoffmenge	N
Lichtstärke	J

Tabelle 1: Dimensionen.

Aus diesen sieben Dimensionen lässt sich die Dimension jeder beliebigen physikalischen Größe X zusammensetzen als

$$\dim(X) = L^{\alpha} \cdot T^{\beta} \cdot M^{\gamma} \cdot \Theta^{\delta} \cdot I^{\varepsilon} \cdot N^{\zeta} \cdot J^{\eta}.^{[1]} \qquad (1)$$

Beispiel: Der Betrag v der Geschwindigkeit beschreibt, welche Wegstrecke in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird. Die Dimension von v ist Länge/Zeit, oder, abgekürzt geschrieben,

[1] Als Symbole für die Exponenten werden hier die ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, alpha, beta, gamma, delta, epsilon, zeta und eta, verwendet.

$$\begin{aligned}\dim(v) &= L/T \\ &= L\,T^{-1}.\end{aligned}$$

Entsprechend Gleichung 1 lässt sich dies auch schreiben als

$$\dim(v) = L^1\,T^{-1}\,M^0\,\Theta^0\,I^0\,N^0\,J^0.$$

Zwei Größen, zwischen denen ein Plus-, Minus- oder Gleichheitszeichen steht, müssen dieselbe Dimension besitzen. Dieser Grundsatz lässt sich gleich in zweifacher Weise nutzen, zur Überprüfung physikalische Gleichungen und zur Herleitung von Beziehungen zwischen physikalischen Größen.

Beispiel 1: Sie sollen den Betrag der Zentripetalkraft berechnen und können sich nicht mehr genau erinnern, ob dies nach der Gleichung $F_Z = m\,v^2\,r$ oder nach der Gleichung $F_Z = m\,v^2/r$ zu erfolgen hat. Die Antwort können Sie durch eine Dimensionsanalyse finden:

Um sich zu überlegen, welche Dimension eine Kraft hat, könnten Sie sich beispielsweise das Newtonsche Kraftgesetz $F = m\,a$ in Erinnerung rufen. Das Symbol m steht für die Masse, d. h. $\dim(m) = M$, das Symbol a für die Beschleunigung, d. h. die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit mit $\dim(a) = L\,T^{-1}/T = L\,T^{-2}$ (zum Rechnen mit Exponentialfunktionen siehe Abschnitt 2.3). Es folgt

$$\begin{aligned}\dim(F) &= \dim(m)\,\dim(a) \\ &= M\,L\,T^{-2}.\end{aligned}$$

Dies gilt auch für die Zentripetalkraft F_Z.

$$\begin{aligned}\dim(m\,v^2\,r) &= M\,(L\,T^{-1})^2\,L \\ &= M\,L^3\,T^{-2} \\ &\neq \dim(F_Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim(m\,v^2/r) &= M\,(L\,T^{-1})^2/L \\ &= M\,L\,T^{-2} \\ &= \dim(F_Z)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ richtige Gleichungsvariante: $F_Z = m\,v^2/r$

Beispiel 2: Wie lässt sich die Schwingungsdauer t_0 eines frei schwingenden Fadenpendels ermitteln?

Lösung: Man formuliert einen Ansatz für den gesuchten Zusammenhang, schreibt diesen um in eine Dimensionsgleichung und bestimmt in dieser die Exponenten. Im vorliegenden Beispiel könnte man zunächst einmal ansetzen, dass die Schwingungsdauer t_0 von der Fadenlänge l, der Masse m des Pendelkörpers und der Schwerebeschleunigung g an der Erdoberfläche abhängt:

$$t_0 = C\,l^\alpha\,m^\beta\,g^\gamma$$

wobei mit C ein konstanter Faktor gemeint ist, ein reiner Zahlenwert bzw. eine **dimensionslose Größe**. Für eine dimensionslose Größe C gilt $\dim(C) = 1$. Damit ergibt sich die Dimensionsgleichung

$$\begin{aligned}\dim(t_0) &= \dim(C)\ \dim(l)^\alpha\ \dim(m)^\beta\ \dim(g)^\gamma \\ T &= L^\alpha\ M^\beta\ (L\ T^{-2})^\gamma.\end{aligned}$$

Diese lässt sich umschreiben zu

$$L^0\ M^0\ T^1 = L^{\alpha+\gamma}\ M^\beta\ T^{-2\gamma}.$$

Nun werden die Exponenten an L, M und T auf beiden Seiten der Gleichung verglichen. Die Dimension der Größen auf den beiden Seiten der Gleichung stimmt nur dann überein, wenn die Exponenten gleich sind:

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ -2\gamma &= 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\gamma = -\frac{1}{2}$ und $\alpha = +\frac{1}{2}$ und damit

$$\begin{aligned}t_0 &= C\ l^{1/2}\ g^{-1/2} \\ &= C\sqrt{\frac{l}{g}}\ .\end{aligned}$$

Die Konstante C lässt sich durch die Dimensionsanalyse nicht bestimmen (es ist $C = 2\pi$), aber die wesentlichen Zusammenhänge sind geklärt, etwa dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Masse des Pendelkörpers ist.

2 Einheit

2.1 Basiseinheiten und zusammengesetzte Einheiten

Um eine Größe auch quantitativ, d. h. von ihrer Menge her, beschreiben zu können, wird jeder Dimension eine Einheit zugeordnet. In Deutschland und den meisten Ländern der Welt ist als Einheitensystem gesetzlich das système international d'unités (SI) festgeschrieben. Den Dimensionen werden darin die in Tabelle 2 aufgeführten so genannten **Basiseinheiten** zugeordnet.

Dimension	Einheit
Länge	1 m (Meter)
Zeit	1 s (Sekunde)
Masse	1 kg (Kilogramm)
Temperatur	1 K (Kelvin)
elektrische Stromstärke	1 A (Ampère)
Stoffmenge	1 mol (Mol)
Lichtstärke	1 cd (Candela)

Tabelle 2: Die Basiseinheiten des SI.

Um die Einheit einer physikalischen Größe symbolisch zu bezeichnen, wird das Symbol für die betreffende Größe in eckige Klammern gesetzt. Es ist *nicht* korrekt, stattdessen das Symbol für die Einheit in eckige Klammern zu setzen. Falsch ist beispielsweise eine Angabe wie t = 2 [s], falls eine Zeit von zwei Sekunden gemessen wurde. Richtig dagegen wäre in diesem Fall die Angabe t = 2 s mit [t] = 1 s.

Die Einheit einer beliebigen physikalischen Größe X ist entsprechend Gleichung 1

$$[X] = 1\ \mathrm{m}^{\alpha} \cdot \mathrm{s}^{\beta} \cdot \mathrm{kg}^{\gamma} \cdot \mathrm{K}^{\delta} \cdot \mathrm{A}^{\varepsilon} \cdot \mathrm{mol}^{\zeta} \cdot \mathrm{cd}^{\eta}. \qquad (2)$$

Ergibt sich die Einheit einer Größe durch Kombination mehrerer Basiseinheiten spricht man von einer **zusammengesetzten Einheit**.

Beispiel 1: Betrag v der Geschwindigkeit

$$\dim(v) = L^1\ T^{-1}\ M^0\ \Theta^0\ I^0\ N^0\ J^0 \text{ (Abschnitt 1)}$$

$$[v] = 1\ \mathrm{m}^1\ \mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{K}^0\ \mathrm{A}^0\ \mathrm{mol}^0\ \mathrm{cd}^0$$
$$= 1\ \mathrm{m/s}$$

Beispiel 2: Betrag F der Kraft

$$\dim(F) = M\ L\ T^{-2}\ \Theta^0\ I^0\ N^0\ J^0$$

$$[F] = 1\ \mathrm{kg\ m\ s}^{-2}\ \mathrm{K}^0\ \mathrm{A}^0\ \mathrm{mol}^0\ \mathrm{cd}^0$$
$$= 1\ \mathrm{N} \text{ (Newton)}$$

2.2 Hinweise zum praktischen Umgang mit Einheiten

Bei der Angabe des Wertes einer physikalischen Größe darf niemals die Einheit vergessen werden! Ein Beispiel zur Warnung: Im Jahr 1999 stürzte die amerikanische Raumsonde Mars Climate Orbiter ab und zerschellte auf der Oberfläche des Mars. Eine Untersuchungskommission der NASA fand den Grund: In einer der Arbeitsgruppen des Projektes wurden Werte der Kraft in der angloamerikanischen Einheit pound force errechnet und an eine andere Arbeitsgruppe übermittelt, in der man davon ausging, dass die gelieferten Zahlenwerte in der SI-Einheit Newton angegeben seien. Der finanzielle Verlust (im Jahr 1999): 125 Millionen Dollar.

Auch in Zwischenschritten von Berechnungen sind die Einheiten immer korrekt anzugeben.

Beispiel: Die Gewichtskraft eines Körpers der Masse m = 100 kg an der Erdoberfläche ist zu ermitteln. Die Berechnung als

$$F = m\ g$$
$$= 100 \cdot 9{,}81$$
$$= 981\ \mathrm{N}$$

ist unsinnig und damit falsch, da in der zweiten Zeile ein reiner Zahlenwert steht, in der dritten Zeile aber eine Kraft in der Einheit Newton. Diese beiden Größen können nicht gleich sein.

Einheiten auch in Zwischenschritten von Berechnungen korrekt mitzuführen, ist jedoch nicht nur lästige Pflicht, sondern kann gleichzeitig der Kontrolle dienen, ob die Berechnungen grundsätzlich richtig durchgeführt werden.

Beispiel: Die Zentripetalkraft, die auf einen Körper der Masse m = 1,0 kg einwirken muss, um ihn mit der konstanten Geschwindigkeit v = 1,0 m/s auf einer Kreisbahn des Radius r = 1,0 m zu halten, ist zu berechnen. Angenommen, die Berechnung wird ausgeführt als

$$F_Z = m\,v^2\,r = 1{,}0\text{ kg} \cdot (1{,}0\text{ m/s})^2 \cdot 1{,}0\text{ m} = 1{,}0\text{ kg m}^3/\text{s}^2$$

so zeigt schon der Blick auf die Einheiten, dass diese Berechnung falsch ist, denn die Einheit der Kraft ist 1 N = 1 kg m/s^2 und nicht 1 kg m^3/s^2. Die Analyse der Einheiten kann hier die Dimensionsanalyse ersetzen (vgl. Beispiel 1 in Abschnitt 1).

Sollen Werte aus unterschiedlichen Einheitensystemen, z. B. dem SI und dem angloamerikanischen System, miteinander verrechnet oder verglichen werden, muss eine **Einheitenumrechnung** vorgenommen werden. Mathematisches Hilfsmittel ist dabei der Dreisatz bzw. die Schlussrechnung.

Beispiel: Das Zoll (englisch: inch, Einheitenzeichen: in) ist eine Längeneinheit aus dem angloamerikanischen Maßsystem. Es ist 1 in = 2,54 cm. Die Einheit Zoll ist vor allem in der Technik immer noch weit verbreitet, etwa zur Kennzeichnung von Bildschirmgrößen. Nach welcher Zollangabe müssen Sie Ausschau halten, wenn Sie einen Bildschirm mit einer Diagonalen von rund 80 cm kaufen möchten?

Lösung: 2,54 cm = 1 in
1 cm = 1/2,54 in
80 cm = 80 · 1/2,54 in ≈ $\underline{\underline{32\text{ in}}}$

2.3 Zehnerpotenzen von Einheiten

Zahlreiche physikalische Größen besitzen einen sehr großen Wertebereich. Beispielsweise wird bei der Emission gelben Lichts durch ein einzelnes Natriumatom eine Energie von etwa 0,0000000000000000000003 J freigesetzt. Die pro Jahr durch die Sonne auf die Erde eingestrahlte Energie dagegen beträgt rund 5500000000000000000000000 J. Es stellt eine erhebliche Vereinfachung dar, solche Werte mithilfe von Zehnerpotenzen zu schreiben, beispielsweise die beiden zuvor genannten Werte als $3 \cdot 10^{-22}$ J und $5{,}5 \cdot 10^{24}$ J.

Bei bestimmten Zehnerpotenzen ist es alternativ möglich, diese nicht explizit auszuschreiben, sondern stattdessen einen **Einheitenzusatz** bzw. ein **Präfix** zu verwenden. Beispiel: 1 000 000 000 W = 10^9 W = 1 Gigawatt = 1 GW. Der Einheitenzusatz bzw. das Präfix G steht also stellvertretend für 10^9. In Tabelle 3 sind einige häufig auftretende Abkürzungen dieser Art für Zehnerpotenzen aufgeführt.

geschrieben	gesprochen	Faktor
T	Tera	10^{12}
G	Giga	10^{9}
M	Mega	10^{6}
k	Kilo	10^{3}
d	Dezi	10^{-1}
c	Zenti	10^{-2}
m	Milli	10^{-3}
µ	Mikro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}

Tabelle 3: Auswahl häufig verwendeter Abkürzungen für Zehnerpotenzen.

Zehnerpotenzen sind Beispiele für Werte einer Exponentialfunktion, nämlich der Exponentialfunktion zur Basis 10. Schon in den vorangegangenen Abschnitten hat sich gezeigt, dass es unerlässlich ist, mit Potenz- und Exponentialfunktionen rechnen zu können. Zur Erinnerung: Eine **Potenzfunktion** ist von der Form

$f(x) = x^a$. (3)

x ist die so genannte Basis, $a \in \mathbb{R}$ der Exponent. Eine **Exponentialfunktion** ist von der Form

$f(x) = a^x$ (4)

mit der Basis $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Für Berechnungen mit Potenz- und Exponentialfunktionen gibt es Regeln, die solche Berechnungen auf die Grundrechenarten Addition, Subtraktion und Multiplikation zurückführen und daher sehr einfach anzuwenden sind. Die im vorliegenden Zusammenhang benötigten Regeln lauten

$10^a\,10^b = 10^{a+b}$ (5)

$10^a/10^b = 10^{a-b}$ (6)

$(10^a)^b = 10^{a\,b}$. (7)

Beispiel 1: Umrechnung von Nanometer in Mikrometer

Diese Aufgabe kann im Kopf gelöst werden. Falls Sie sich dabei allerdings unsicher fühlen, könnten Sie auch eine Gleichung mit dem gesuchten Umrechnungsfaktor formulieren und diese durch Äquivalenzumformungen lösen:

$1\ \text{nm} = x\ \mu\text{m}$
$10^{-9}\ \text{m} = x\ 10^{-6}\ \text{m}$ (Tabelle 3)
$x = 10^{-9}/10^{-6}$
$\quad = 10^{-3}$ (Gleichung 6)
$1\ \text{nm} = \underline{\underline{10^{-3}\ \mu\text{m}}}$

Beispiel 2: Umrechnung von Quadratzentimeter in Quadratmeter

$1\ \text{cm}^2 = (10^{-2}\ \text{m})^2$ (Tabelle 3)
$\quad = \underline{\underline{10^{-4}\ \text{m}^2}}$ (Gleichung 7)

Beispiel 3: Umrechnung von Liter in Kubikmillimeter

$1\ \text{l} = x\ \text{mm}^3$
$(10^{-1}\ \text{m})^3 = x\ (10^{-3}\ \text{m})^3$ (Tabelle 3)
$10^{-3}\ \text{m}^3 = x\ 10^{-9}\ \text{m}^3$ (Gleichung 7)
$x = 10^{-3}/10^{-9}$
$\quad = 10^6$ (Gleichung 6)
$1\ \text{l} = \underline{\underline{10^6\ \text{mm}^3}}$